

Exercice 1

Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $a + bi$, avec a et b des nombres réels :

$$z = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}}, \quad u = \frac{3-i}{(1+i)(1-2i)}, \quad v = \frac{5+i\sqrt{2}}{1+i}, \quad w = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2.$$

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad u = 1 + 0i, \quad v = \frac{\sqrt{2}+5}{2} + \frac{\sqrt{2}-5}{2}i, \quad w = -1 + 0i$$

Exercice 2

Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $z^2 + 2z + 5 = 0$
- $z^2 - 3z + 3 + i = 0$
- $z^2 + 3(1-i)z + 8i = 0$
- $2z^2 - (1+5i)z - 2(1-i) = 0$
- $z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$

- $z = -1 \pm 2i$
- $z = 2 - i$ ou $1 + i$
- $z = 1 - i$ ou $-4 + 4i$
- $z = 2i$ ou $\frac{1+i}{2}$
- $z = 5 - 12i$ ou $-2i$

Exercice 3

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $z_\theta := \cos \theta + i \sin \theta \in \mathbb{C}$. Vérifier que les formules d'addition pour sin et cos sont équivalentes aux affirmations :

$$z_{\alpha+\beta} = z_\alpha \cdot z_\beta, \quad z_{\alpha-\beta} = z_\alpha / z_\beta.$$

Exercice 4

Écrire sous les trois formes (algébrique, trigonométrique et exponentielle) les nombres complexes suivants :

- Nombre de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$
- Nombre de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{8}$

Exercice 5

Effectuer les calculs suivants :

- $(3+2i)(1-3i)$
- $2e^{\frac{\pi}{3}i} \cdot 3e^{-\frac{5\pi}{6}i}$
- $2e^{\frac{\pi}{3}i} / 3e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

Exercice 6

Simplifier les nombres complexes suivants :

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} \quad \text{et} \quad u = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}.$$

Exercice 7

En calculant $(\sqrt{3}+i)(1+i)$, déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 8

Soit $\zeta = e^{\frac{2\pi}{5}i}$ et posons $\alpha = \zeta + \zeta^4$, $\beta = \zeta^2 + \zeta^3$.

- Calculer $\alpha + \beta$ et $\alpha \cdot \beta$.
- En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est racine du polynôme $4x^2 + 2x - 1$.
- Conclure en donnant une formule explicite pour $\cos(\frac{2\pi}{5})$!

Exercice 9

Déterminer les racines ...

- quatrième de 1
- quatrième de -1

- c) cinquièmes de $32i$
- d) cinquièmes de $1 + i$
- e) quatrièmes de $8(1 + \sqrt{3}i)$
- f) quatrièmes de $-119 + 120i$

Exercice 10

- a) Déterminer les solutions complexes à l'équation $u^4 = -4$.
- b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$(z + 1)^4 + 4(z - 1)^4 = 0.$$